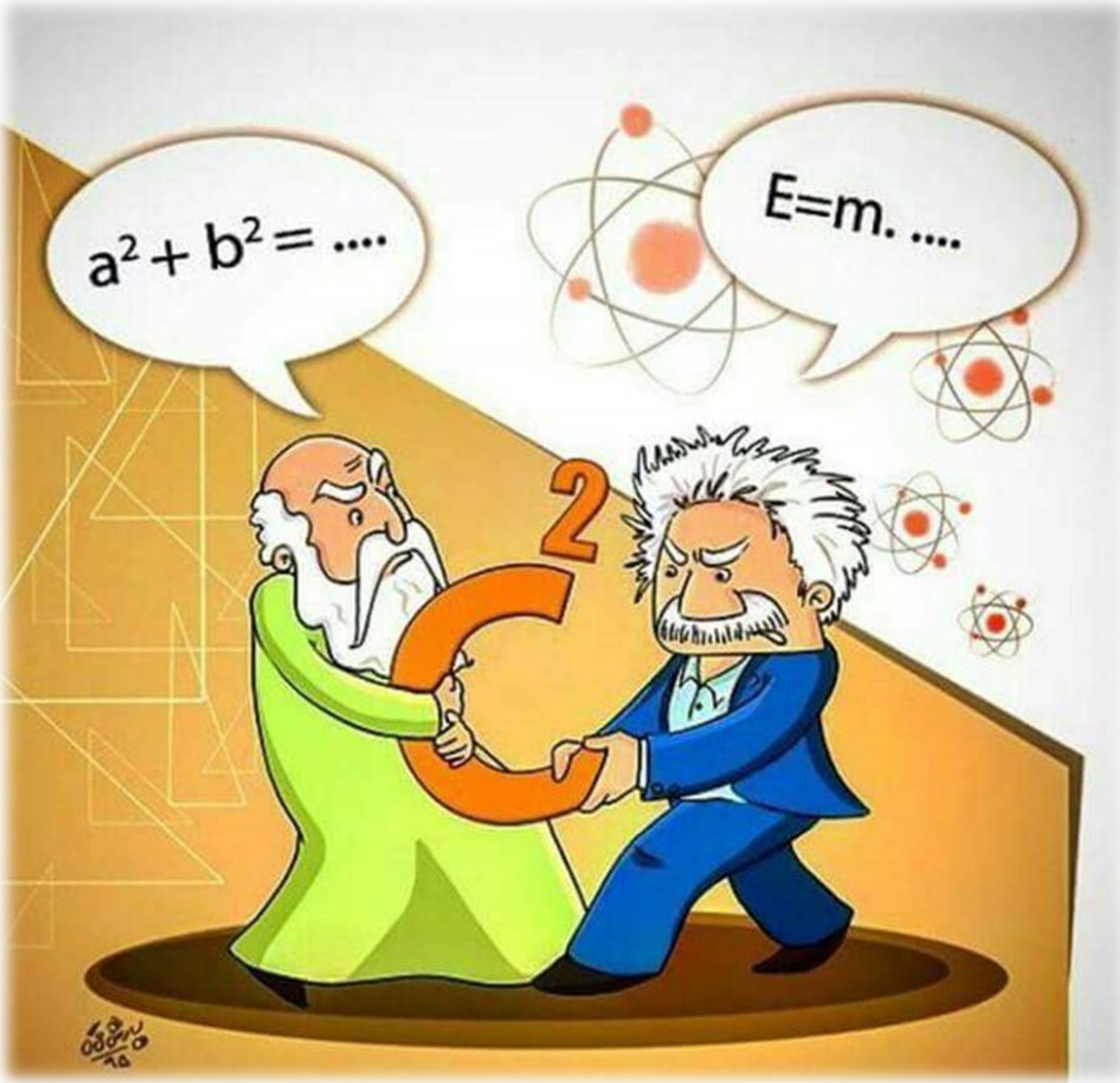
TUTTO QUADRA



Andrea Capozucca

Università di Urbino

Unicam Science Outreach

Convegno PRISTEM

Giochi matematici
e non solo:
sfide e parole chiave

Roma - 30 settembre 2017

Comunicazione vs Didattica

Stimolare, incuriosire

Insegnare

Motivazione,
cambio di atteggiamento

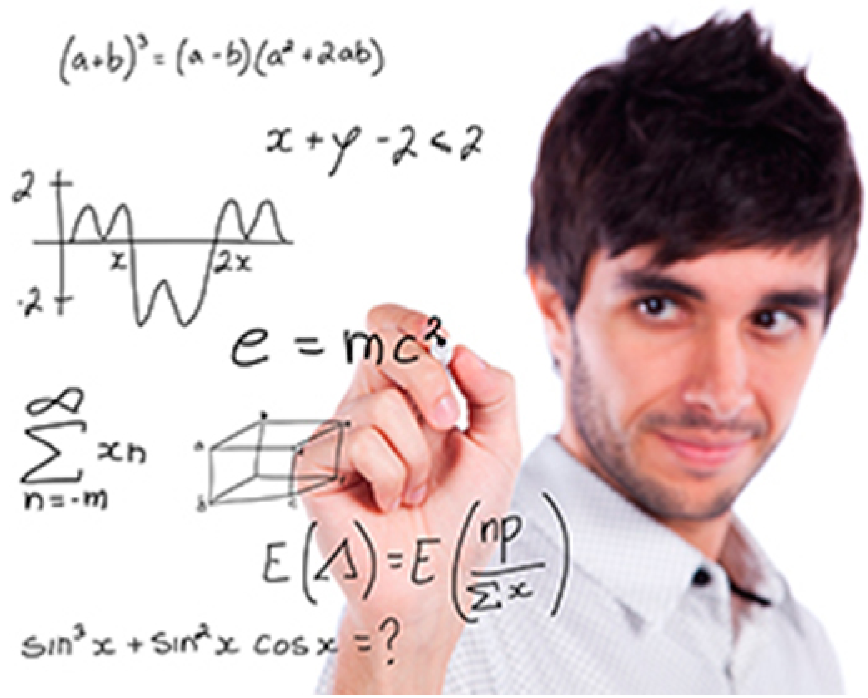
Apprendimento

Gioco, engagement,
storytelling, empatia,
all-person learning

BINGO!!!

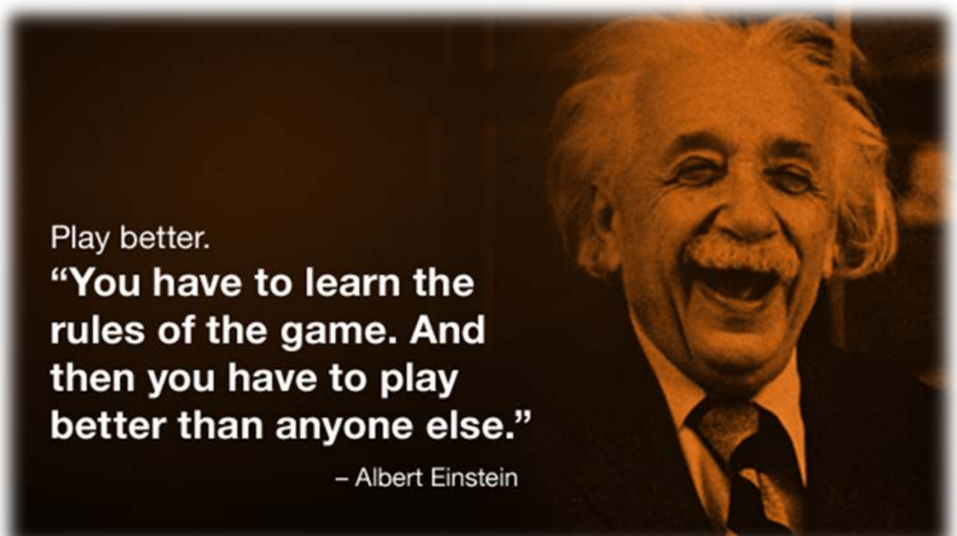
Da RUNNERS...

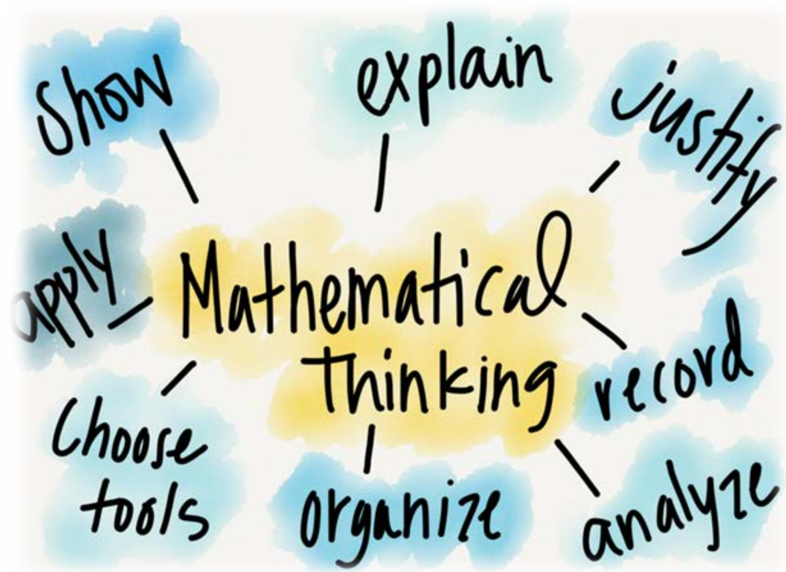
... A THINKERS



Le regole del gioco

1. Pensare facile
2. La mente è lo strumento più potente che abbiamo a disposizione
3. Abituarsi a vedere le analogie anche dove meno ce lo aspettiamo
4. Essere rigorosi

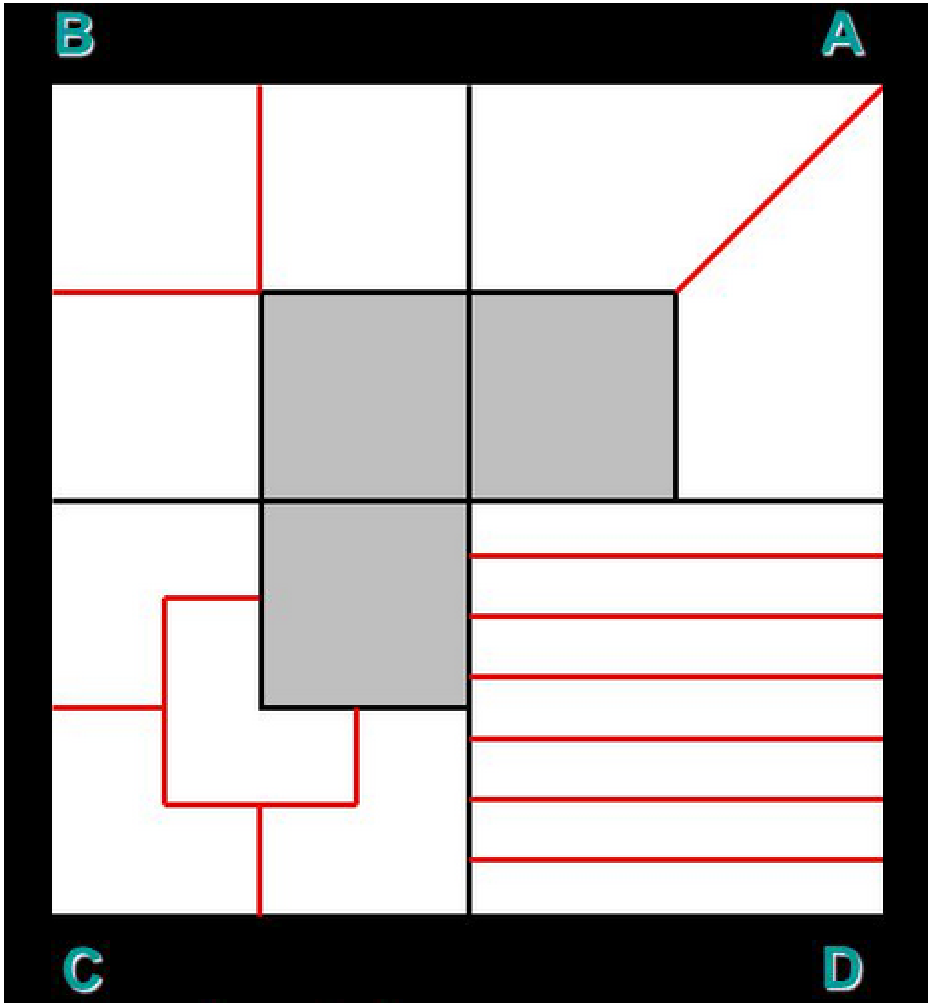




Warm up

Il quadrato a destra è stato diviso in 4 quadrati più piccoli che chiamiamo A, B, C e D

- Dividi l’area bianca A in 2 parti uguali
- Dividi l’area bianca B in 3 parti uguali
- Dividi l’area bianca C in 4 parti uguali
- Dividi l’area bianca D in 7 parti uguali



Il concetto di dimostrazione

- Scacchiera quadrata 6x6
- Tessere del domino

Regola

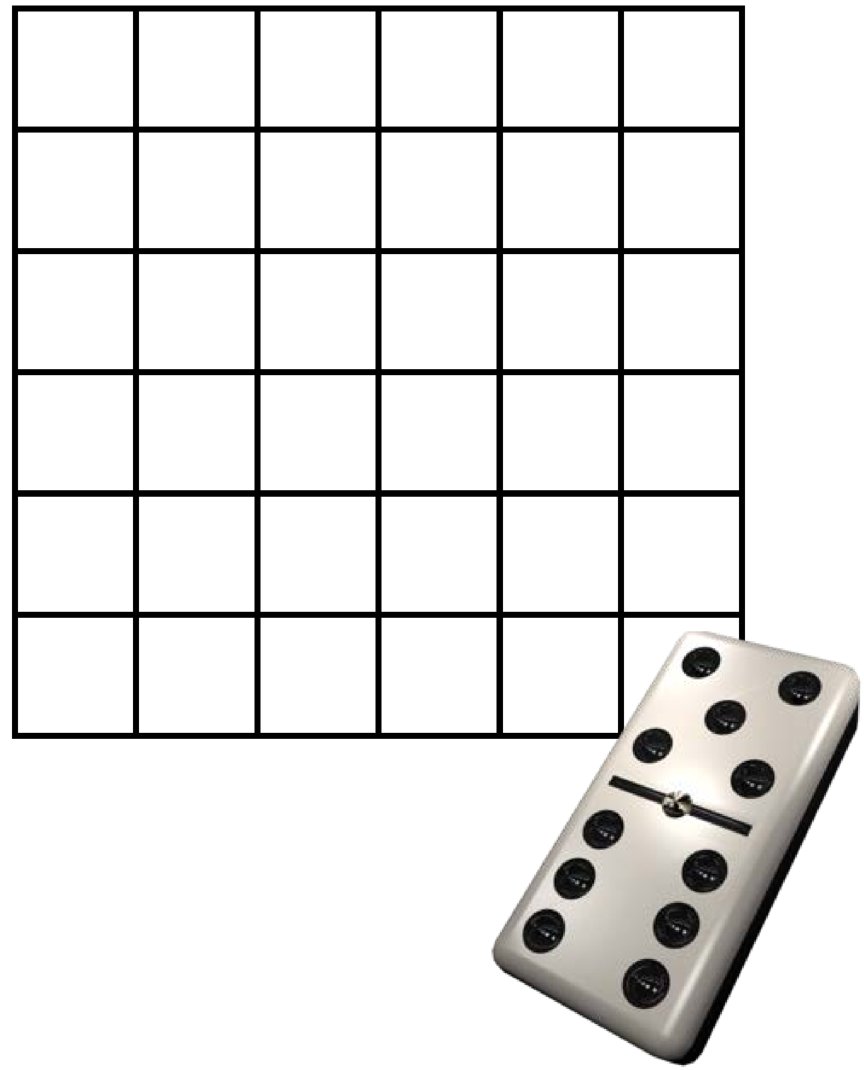
Possiamo utilizzare tutti i pezzi che vogliamo e posizionarli in orizzontale o in verticale

Scopo

Ricoprire completamente la scacchiera senza lasciare nessun quadrato scoperto e senza sovrapporre i pezzi

Variante

E se fosse 5x5?



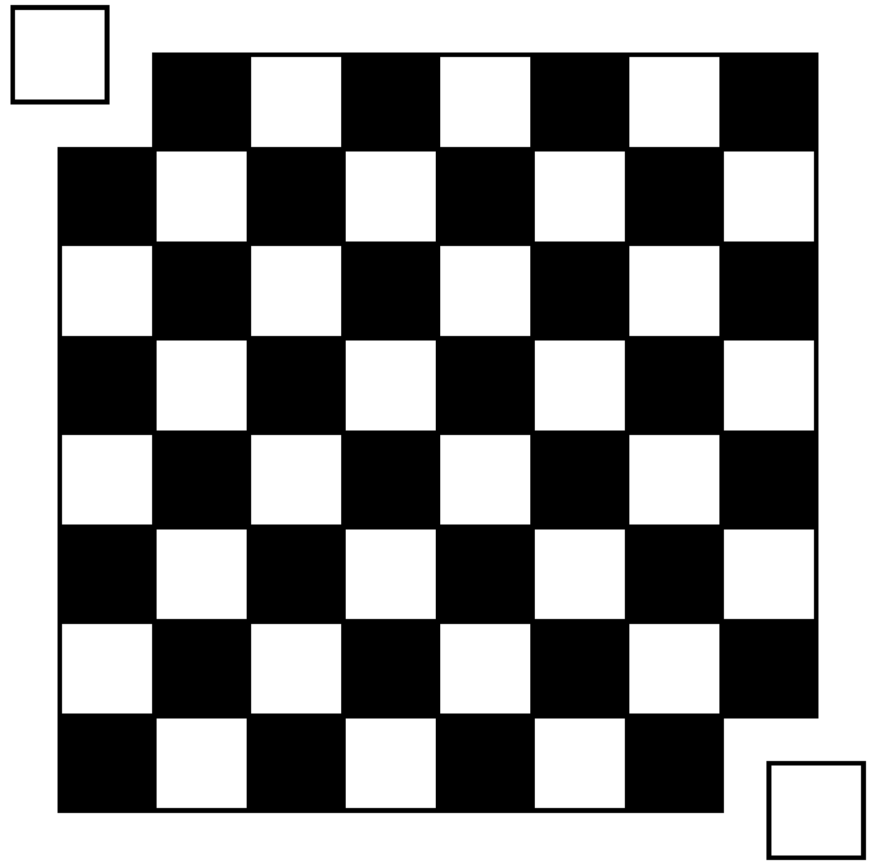
La scacchiera "mutilata"

tratto da *Mathematical Puzzles and Diversions* di Martin Gardner

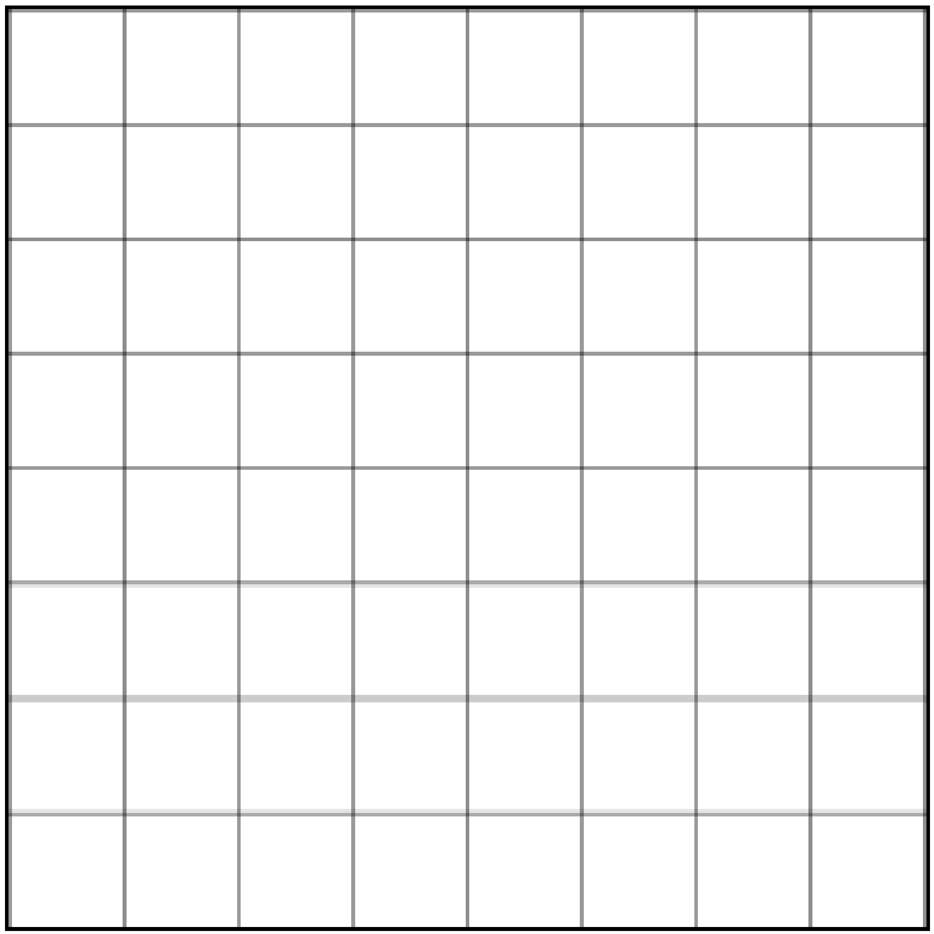
Togliendo due caselle agli angoli opposti, è ancora possibile ricoprire la scacchiera ridotta?

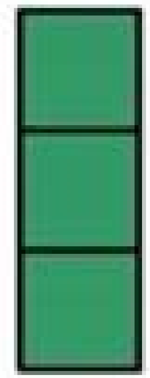
...equivale a...

Essere pari è una condizione necessaria per poterla ricoprire, ma è anche sufficiente?

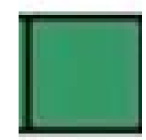


Sfida #1





= 21

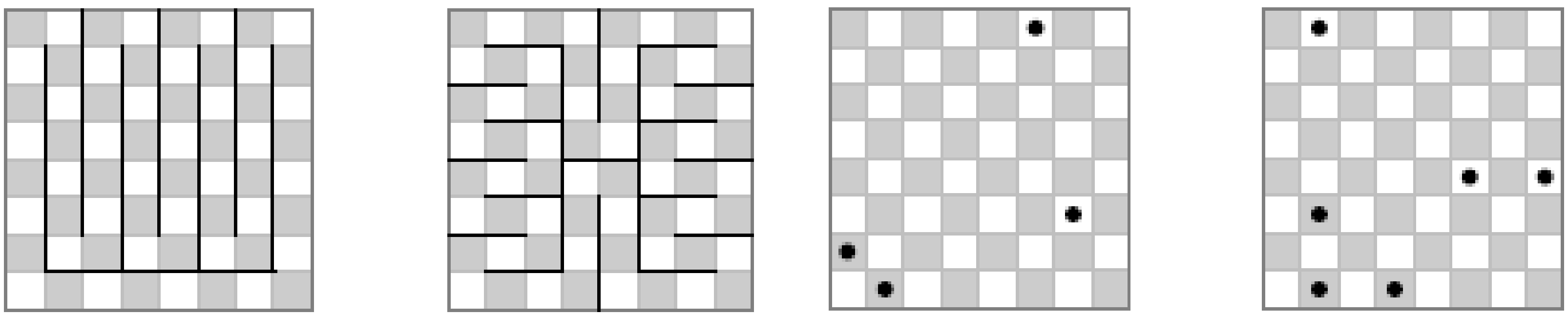


= 1


NICE TRY
BUT I'M NOT CONVINCED YET

Andiamo più a fondo...

1. Cosa succede se le due caselle tolte sono di colore diverso?



Se togliamo due caselle qualunque di colore diverso il percorso chiuso si divide in due parti, ciascuna con un numero pari di caselle

2. E se aumento il numero di caselle da togliere?

...dalla copertura alle possibilità

- Per la scacchiera 8x8 ci sono 12.988.816 modi di ricoprirla!
- Formula generale per scacchiere *m x n*

$$T_{mxn} = \prod_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{n}\left(4\cos^2\left(\frac{\pi \cdot j}{m+1}\right) + 4\cos^2\left(\frac{\pi \cdot k}{n+1}\right)\right)^{\frac{1}{4}}$$

- Se *m = n*, allora

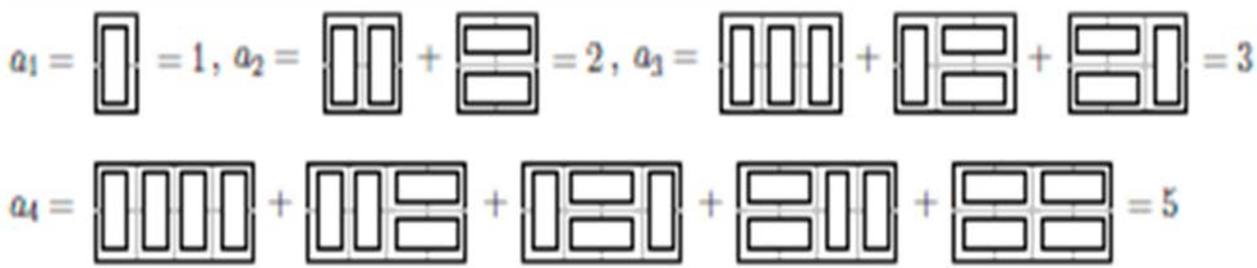
$$T_{2x2} = 2 \quad T_{4x4} = 36^2 \quad T_{6x6} = 2 \cdot 58^2 \quad T_{8x8} = 3604^2$$

NB: La simmetria della regione da riempire (proprietà geometrica) si ripercuote sulla fattorizzazione del numero totale di coperture (proprietà algebrica)

Un esempio più facile (1)

Calcoliamo il numero di coperture di un rettangolo *2 x n*

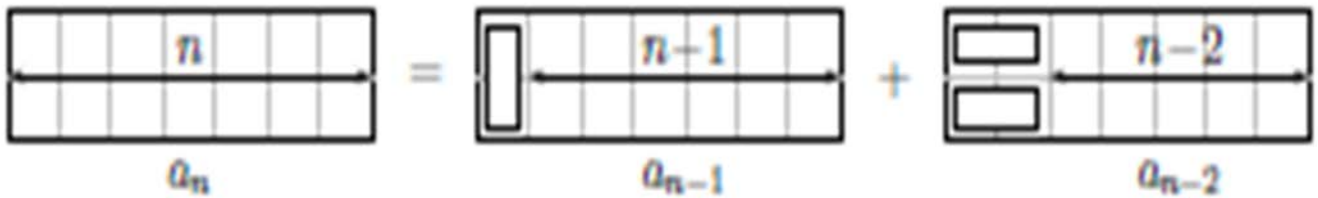
1. Denotiamo con a_n il numero delle coperture
2. Determiniamo i primi elementi di questa successione realizzando le coperture



3. Individuiamo una legge generale: le coperture del rettangolo *2x4* si possono scomporre (a_4 dipende dai due termini precedenti a_3 e a_2)

Un esempio più facile (2)

4. Generalizzando al rettangolo 2 x n...



5. Gli elementi della successione possono essere generati ricorsivamente tramite l'equazione

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

È la successione di Fibonacci!

NB: Questo risultato è utile per verificare alcune identità che rendono la successione di Fibonacci così interessante (ad esempio, come la successione si lega ai coefficienti binomiali)

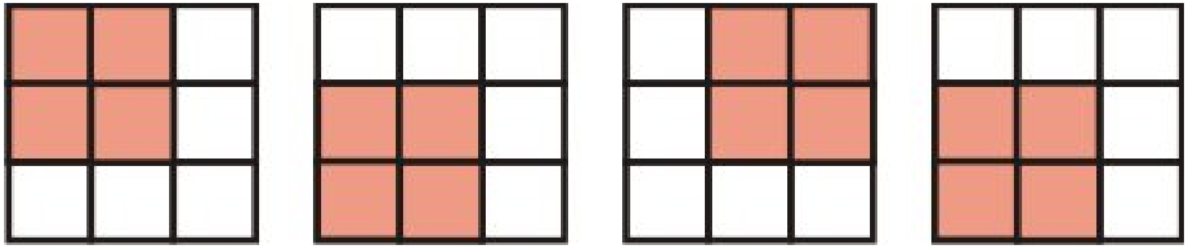
Riconoscere schemi

Problema

Contare il numero di quadrati in una scacchiera

Scopo

Attivare strategie di problem solving del tipo “pensa ad un problema più semplice” e “ cerca le ricorrenze”

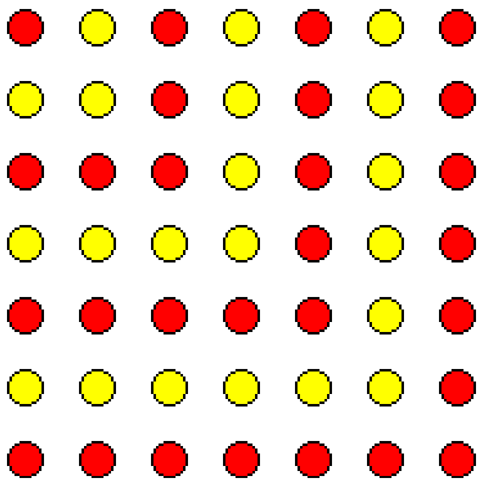


Il numero di quadrati in un quadrato *n x n* è pari $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$

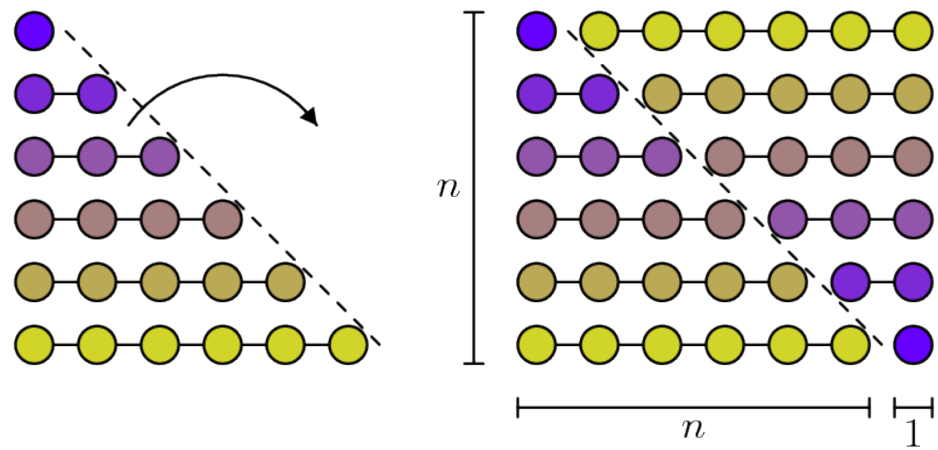
NB: Lo studente capace di arrivare a generalizzazioni del problema potrebbe affinare le competenze algebriche

“Pensare” visivamente (1)

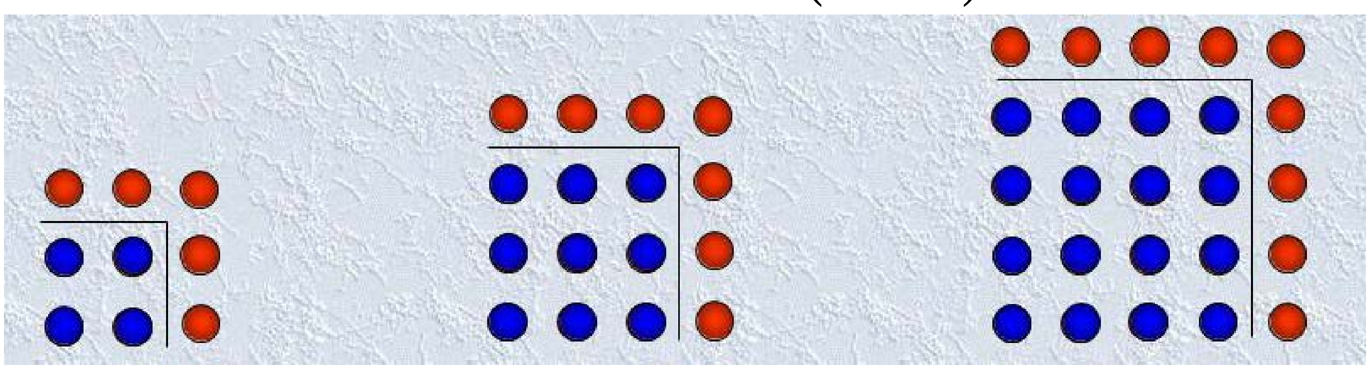
$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$



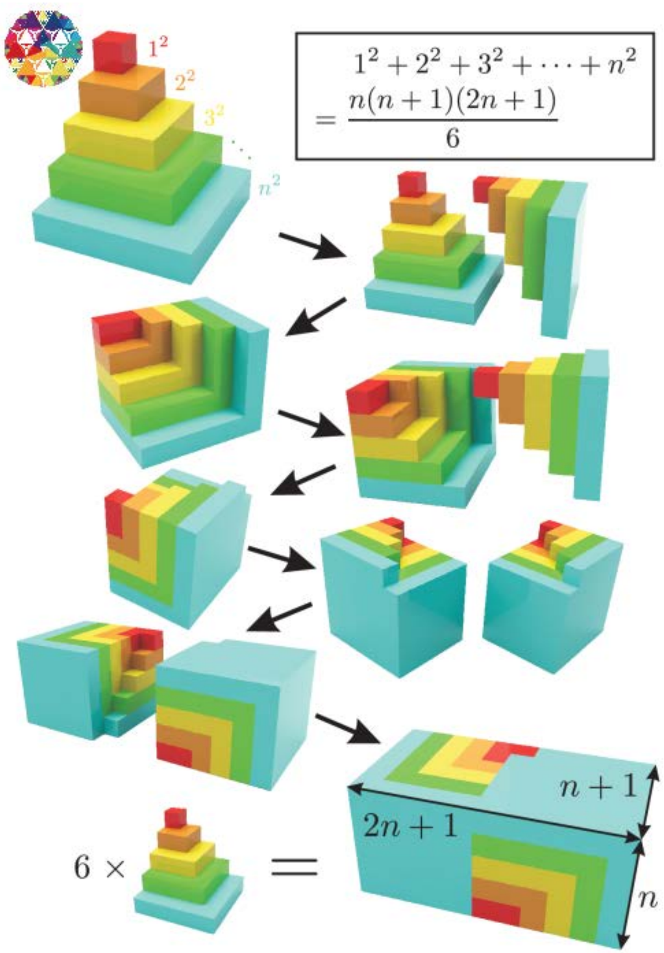
$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n-1)}{2}$$

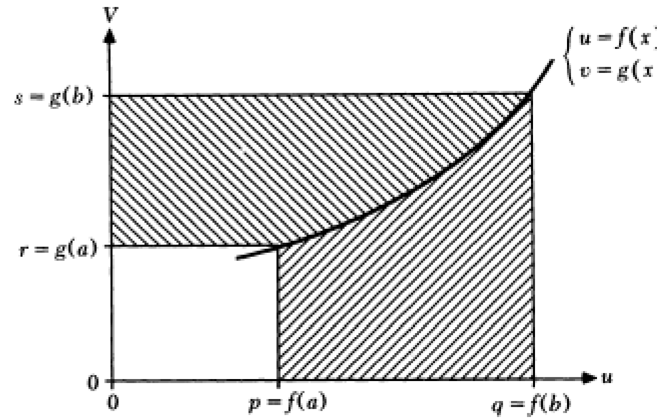


$$2n-1=n^2-(n-1)^2$$



"Pensare" visivamente (2)

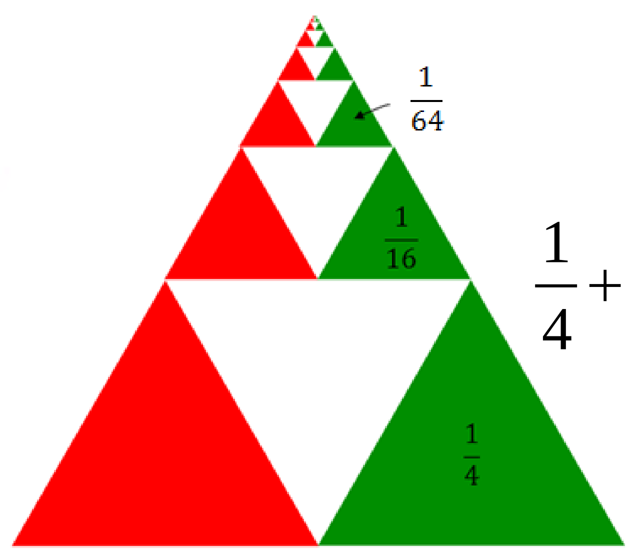




Area ▧ + Area ▨ $= qs - pr$

$$\int_r^s u\,dv + \int_p^q v\,du = uv\Big|_{(p,r)}^{(q,s)}$$

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx$$



$$\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots = \frac{1}{3}$$

Modi diversi, stessa soluzione

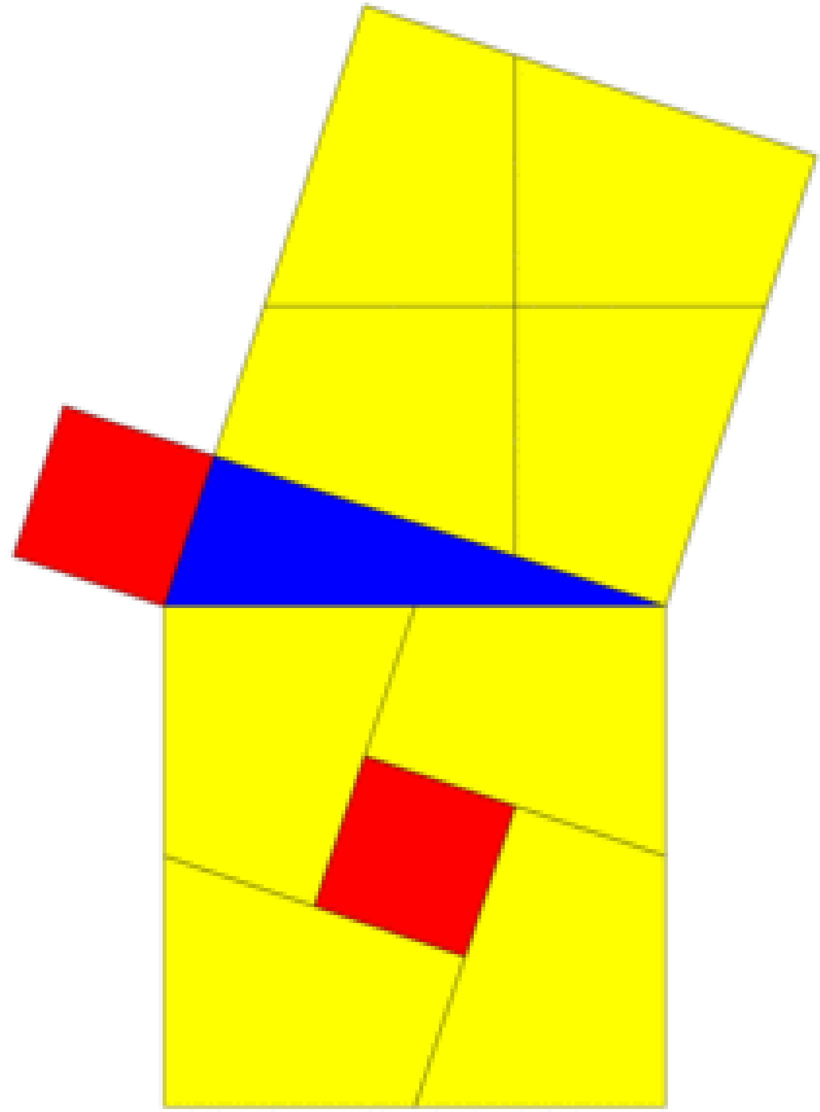
Un esempio ne è il **Teorema di Pitagora**

- Nel 1927 lo scienziato Elisha Scott nel suo libro *The Pythagorean Proposition* classifica 371 diverse dimostrazioni del teorema
- Al sito http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml se ne possono trovare ben 118
- La dimostrazione del teorema completa il primo libro degli Elementi di Euclide immediatamente preceduta dalla costruibilità dei quadrati che si basa anch'essa sul postulato delle rette parallele
- Vediamone alcune...

Dimostrazione attribuita a Abu’l-Wafa

matematico e astronomo persiano - X secolo d.C.

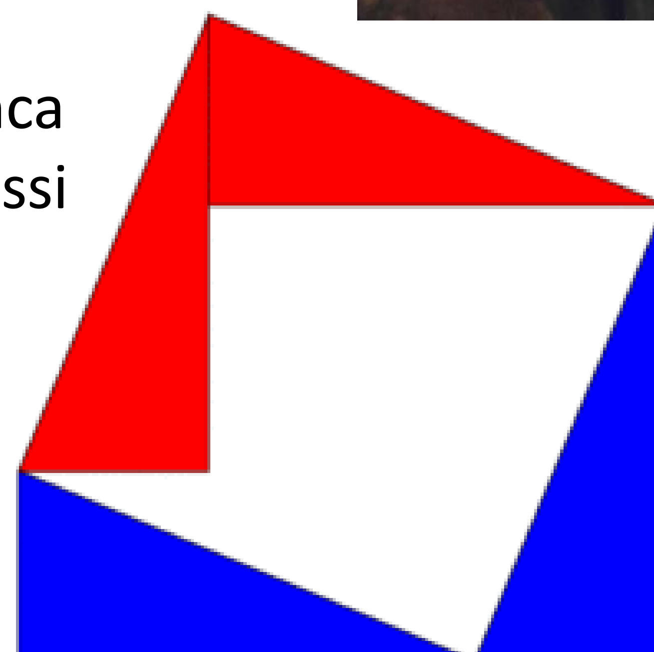
- Riscoperta dall’agente di cambio Henry Perigal e pubblicata nel 1872
- Si basa sul concetto di dissezione del quadrato più grande con due rette che passano per il suo centro, una parallela e l’altra perpendicolare all’ipotenusa



Dimostrazione "poetica" di Airy

astronomo inglese (1801-1892)

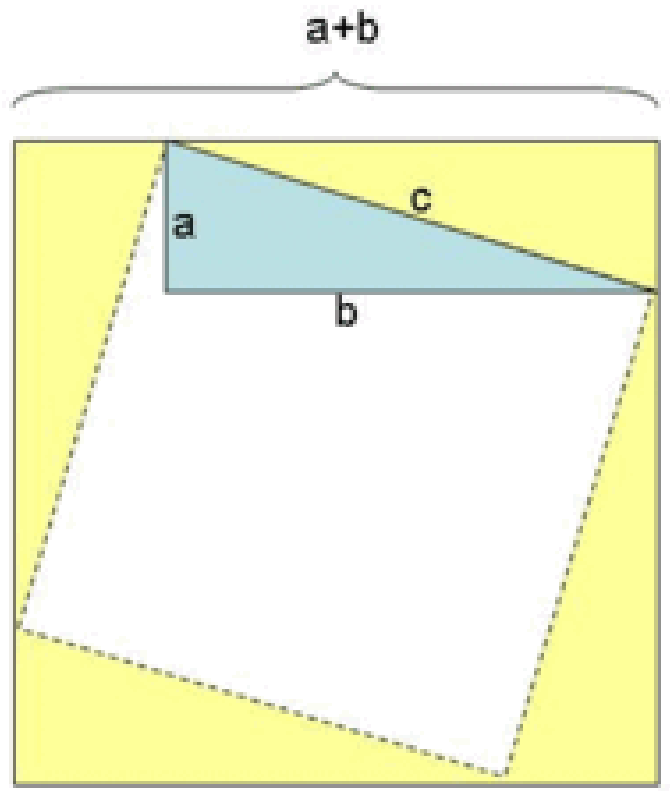
I am, as you can see,
$a^2 + b^2 - ab$
When two triangles on me stand,
Square of hypothenuse is plann'd
But if I stand on them instead
The squares of both sides are read.



- I versi si riferiscono alla parte bianca
- I primi due triangoli sono quelli rossi
- I secondi sono quelli blu
- Dimostrazione puramente geometrica che non richiede nessuna operazione

Quadrati concentrici di Pomi

- Utilizza il passaggio algebrico del quadrato della somma di due numeri
- Rappresentazione visiva semplice
- Tolti i 4 triangoli rettangoli gialli al quadrato più grande si ottiene il quadrato più piccolo:



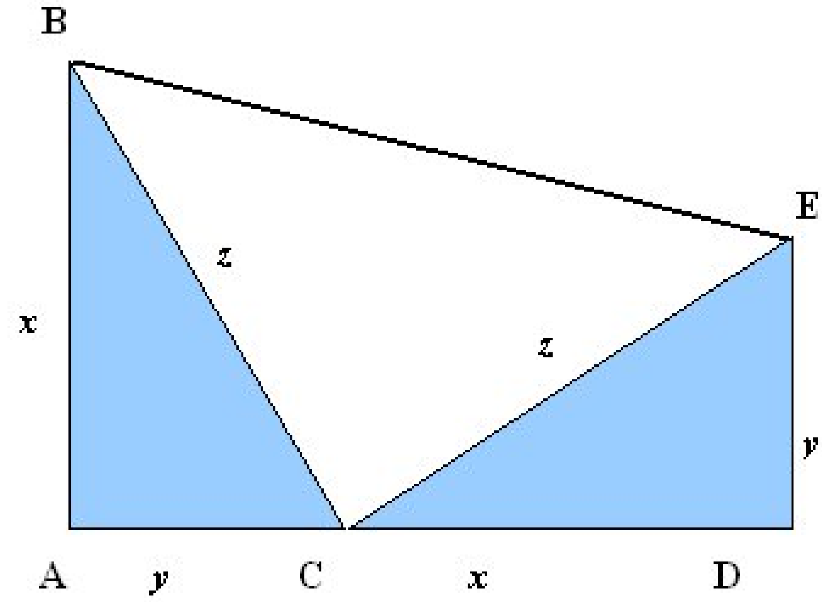
$$c^2 = (a+b)^2 - 4\frac{ab}{2} = a^2 + b^2 + 2ab - 2ab = a^2 + b^2$$

Dimostrazione di Garfield

ventesimo presidente degli Stati Uniti d'America nel 1881

Garfield commentò il risultato dicendo:

"Questo è qualcosa su cui i due rami del parlamento potranno essere d'accordo"



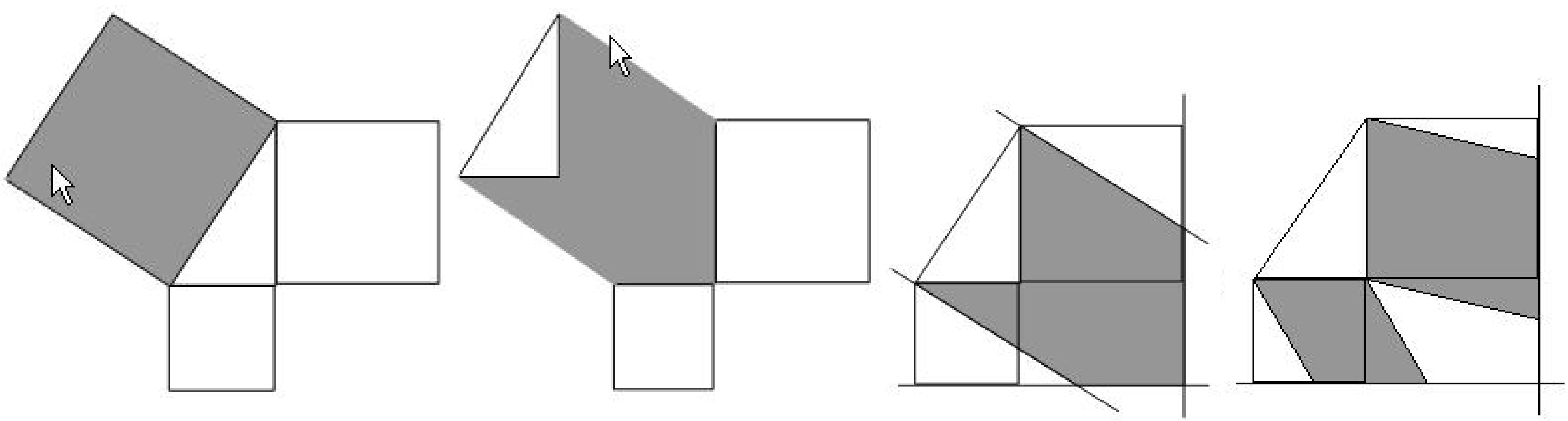
L'angolo BCE misura 90°.

L'area del trapezio di basi AB ed ED è uguale alla somma delle aree dei tre triangoli ABC, CDE e BCE.

$$A_{trapezio} = \boxed{(x+y)^2 = \frac{z^2 + 2xy}{2}} = A_{ABC} + A_{CDE} + A_{BCE}$$

Dimostrazione di Baravalle a “film” geometrico

Mostra come suddividere il quadrato sull’ipotenusa in due parallelogrammi che poi si allontanano deformandosi – senza cambiare area – per formare i due quadrati più piccoli (sfrutta il teorema di Cavalieri)




I'M STILL NOT
CONVINCED ABOUT THIS

Problema di massimo e minimo (1)

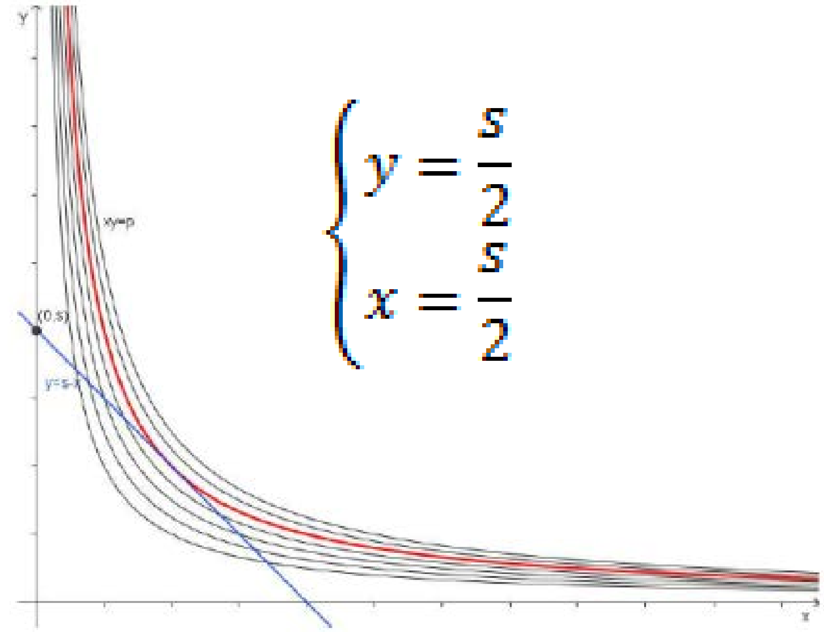
Dati x e y numeri reali positivi tali che la loro somma sia costante, il loro prodotto è massimo quando essi sono uguali

Soluzione analitica

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = s - x \\ xy = p \end{cases}$$

$$x^2 - sx + p = 0$$

$$\Delta = s^2 - 4p = 0 \Rightarrow p = \frac{s^2}{4}$$



$$\begin{cases} y = \dfrac{s}{2} \\ x = \dfrac{s}{2} \end{cases}$$

Problema di massimo e minimo (2)

Soluzione algebrica

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Rightarrow xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

L'uguaglianza, e quindi il massimo, si ha quando i due numeri sono uguali.

Interpretazione geometrica

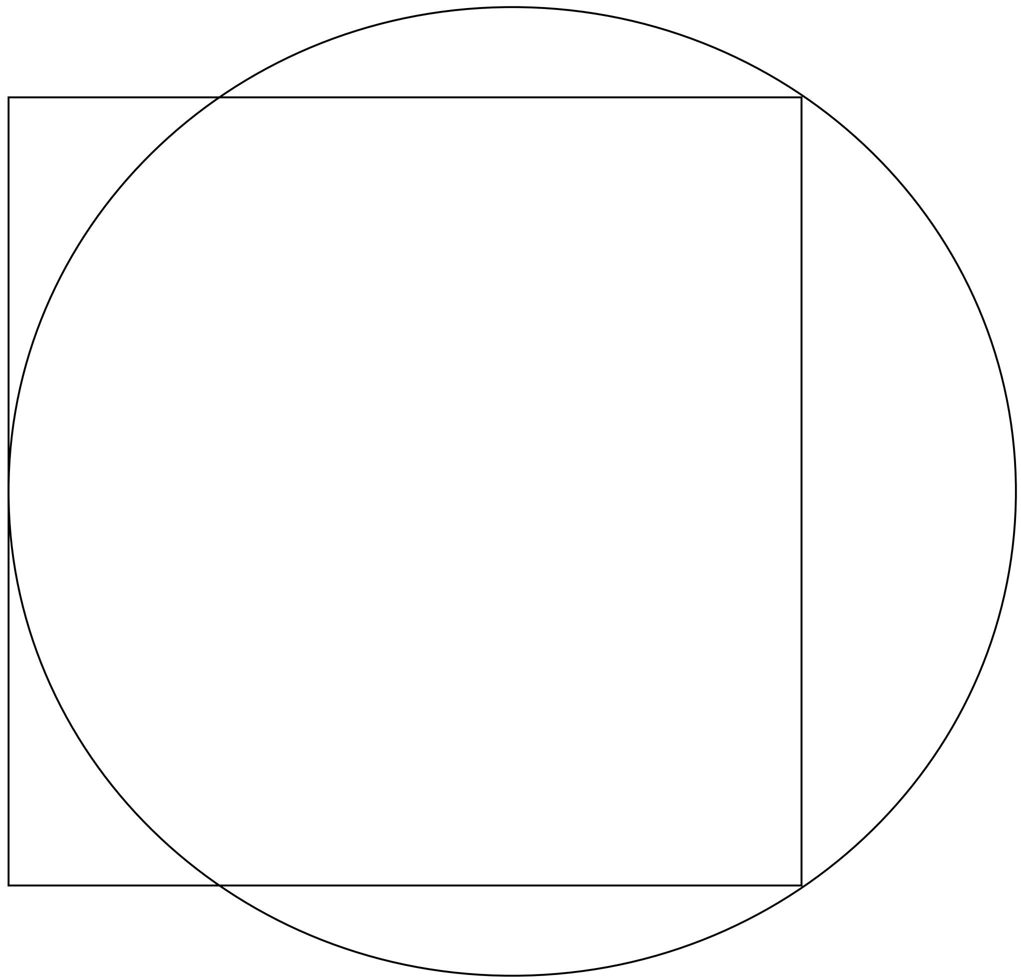
Siano x e y le dimensioni di un rettangolo.

Allora il problema è equivalente a ricercare fra tutti i rettangoli di perimetro assegnato, quello di area massima.

Questa situazione di massimo si ha quando i lati sono uguali, ovvero nel caso del quadrato.

Fra tutti i rettangoli di perimetro assegnato, il quadrato ha area massima.

Sfida #2

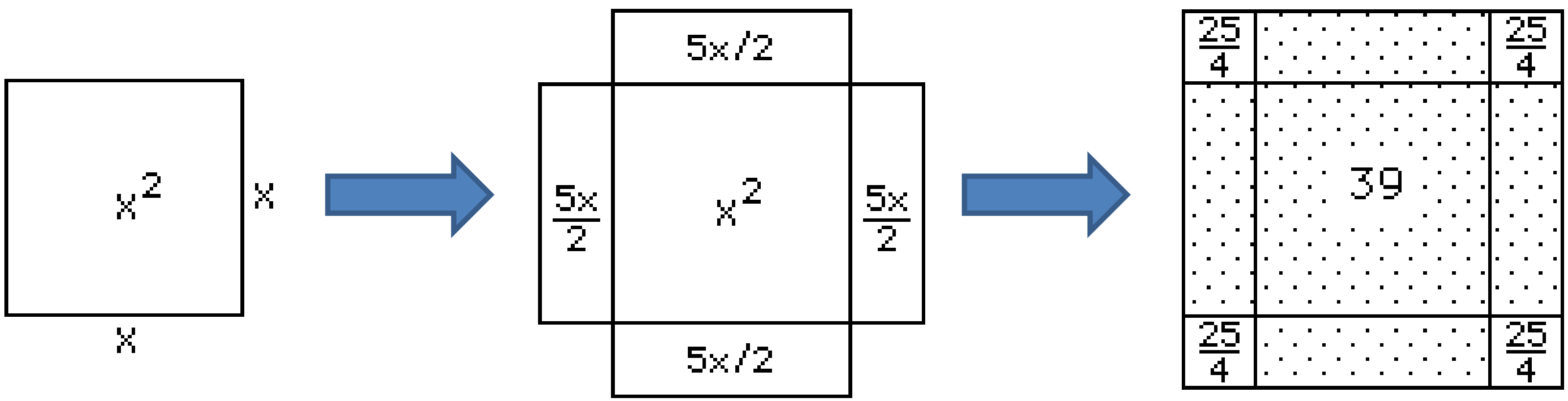


È maggiore la circonferenza o il perimetro del quadrato?

L'equazione di secondo grado

Supponiamo di voler risolvere l'equazione

$$x^2 + 10x = 39$$

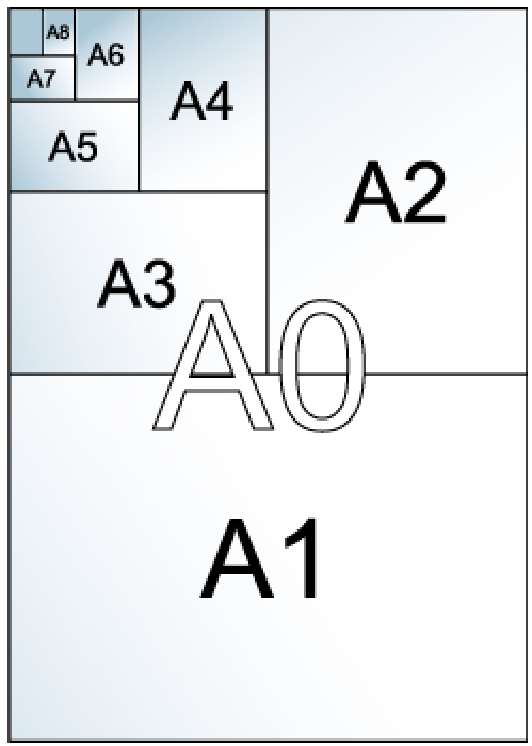


$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Irrazionali figli di quadrati

$$x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488\ldots$$

Nome	Dimensioni (mm)
A0	841x1189
A1	594x841
A2	420x594
A3	297x420
A4	210x297
A5	148x210
A6	105x148



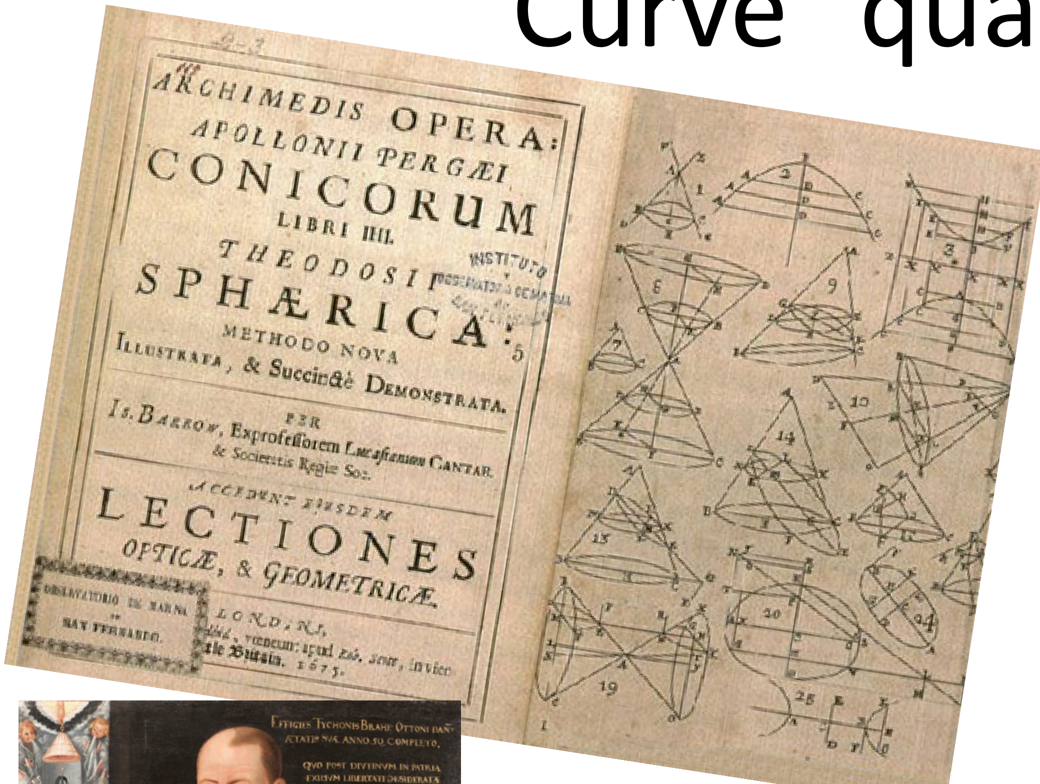
Che tipo di proporzione è? Siano x e y la misura dei lati del foglio in metri con x quella del lato lungo.

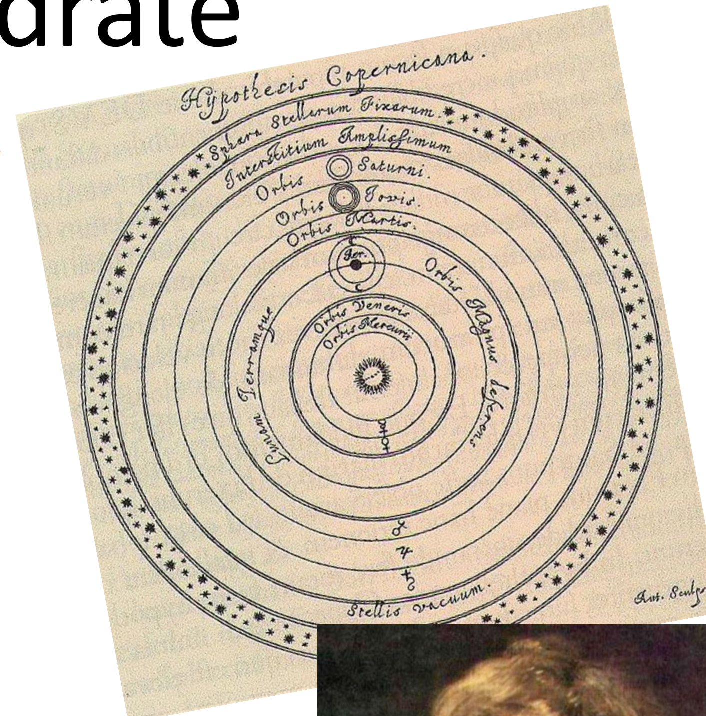
$$\frac{x}{y} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 2$$

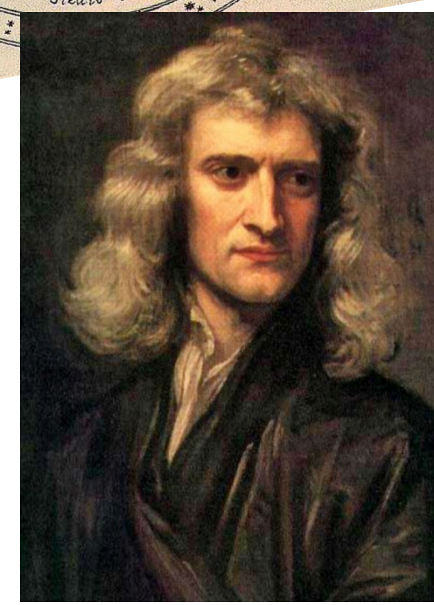
$$1 = A_0 = xy = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$$

$$x = \sqrt[4]{2} = 1{,}189207115$$

Curve “quadrate”





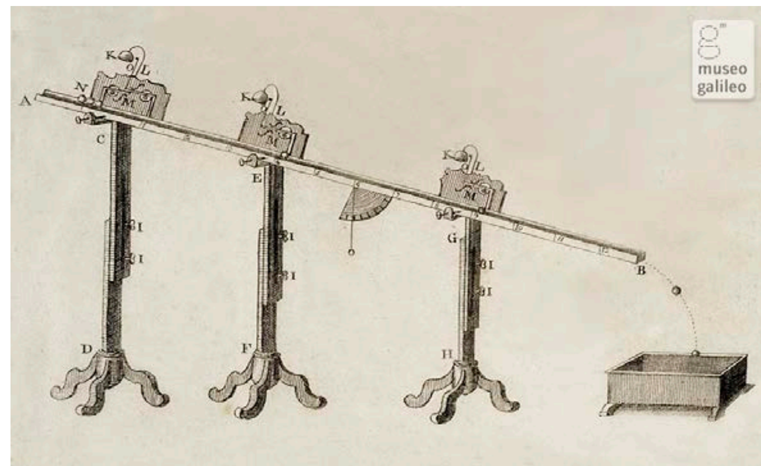


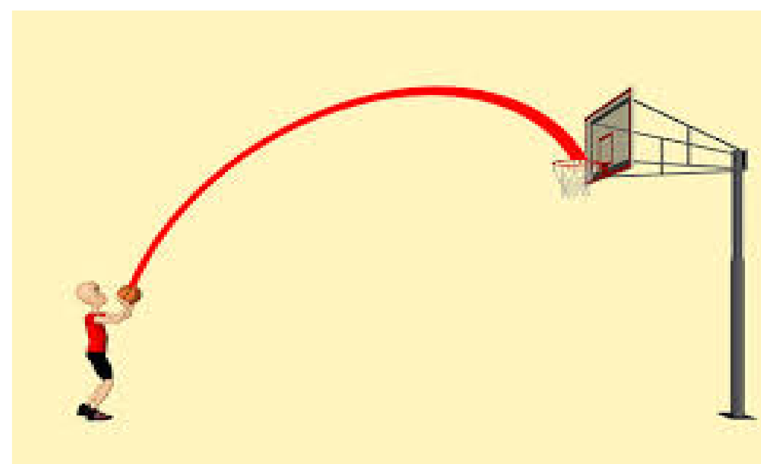
Le equazioni quadratiche possono salvarti la vita

Collegamento tra equazioni quadratiche e accelerazione

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad s = \frac{{v_0}^2}{2a}$$

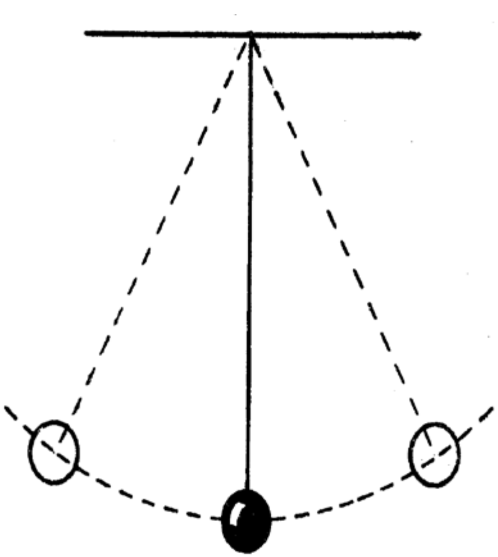
$$y = \left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}} \right) x - \left(\frac{g}{2{v_{0x}}^2} \right) x^2$$





Nella vita bisogna “differenziale”

Le equazioni differenziali sono il cuore di quasi tutte le moderne applicazioni della matematica ai fenomeni naturali, dal comprendere come il calore fluisce attraverso una sbarra al modo in cui si sviluppano gli schemi sulle pellicce degli animali. Le loro applicazioni sono quasi illimitate e giocano un ruolo vitale in molta della moderna tecnologia.



$$a\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+cx=0 \Rightarrow x(t)=e^{wt}$$

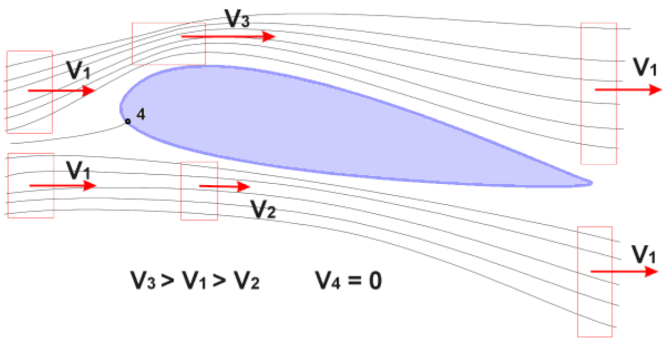
$$\frac{de^{wt}}{dt}=we^{wt}$$

$$aw^2+bw+c=0$$

Essere “sotto pressione”

Se studio il flusso regolare dell’aria a velocità v e pressione P, e una particella d’aria si sta muovendo ad un’altezza h, allora esiste una costante E (l’energia della particella d’aria) tale che

$$\frac{v^2}{2} + P = h$$

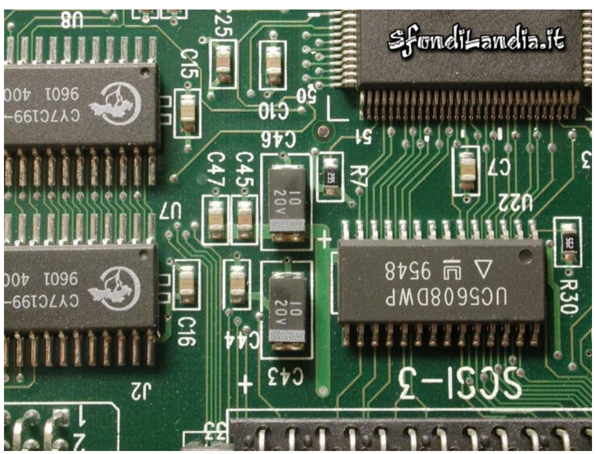


È l’effetto Bernoulli ed è una diretta conseguenza delle leggi del moto di Newton.

L’amico immaginario

$$x^2 + 1 = 0$$

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla^2 u + v(x)u = 0$$

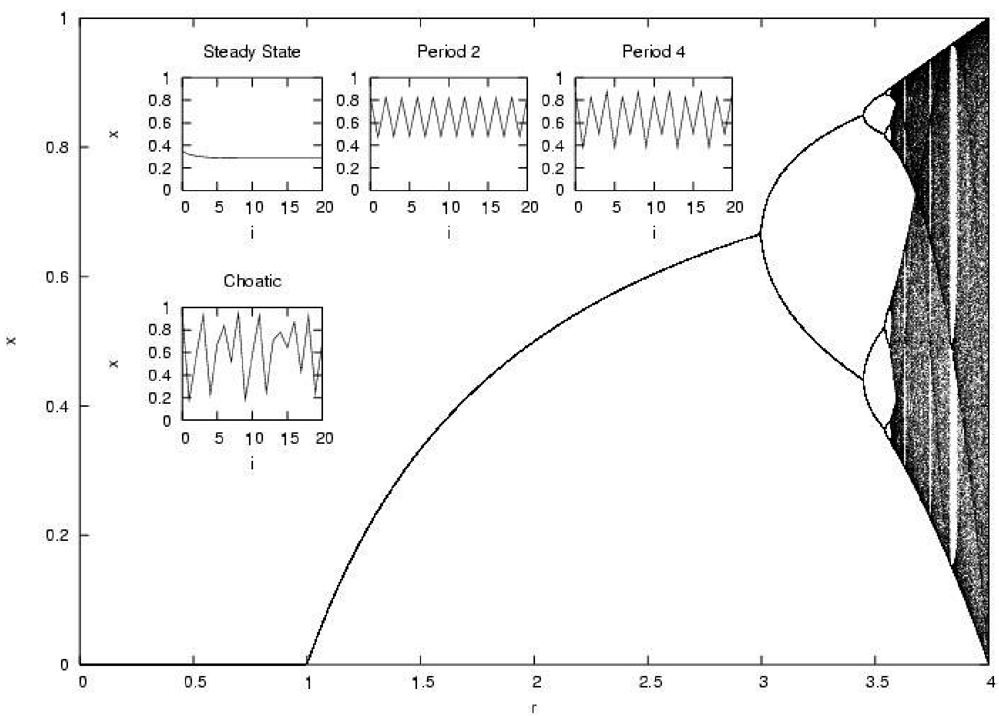


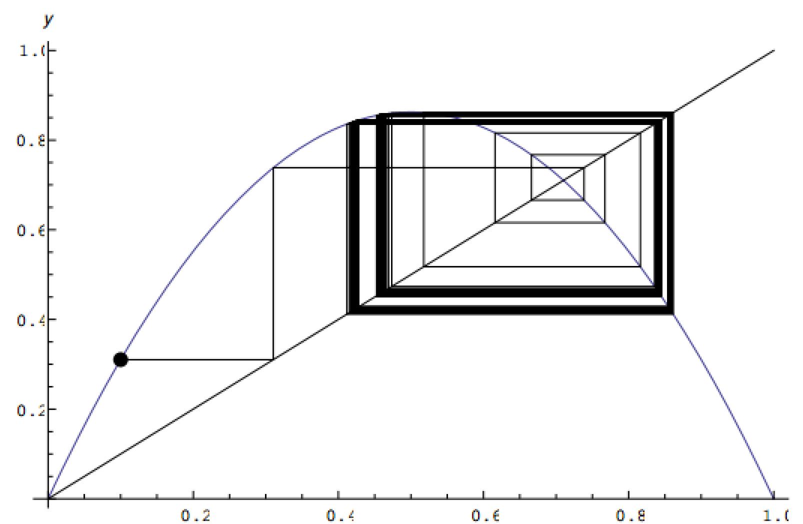
Equazione di Schrodinger viene usata per predirre il movimento degli elettroni e le buche nei semiconduttori e per progettare circuiti integrati con un grandissimo numero di componenti che possono performare compiti straordinarimente complessi.

Tali circuiti sono al cuore di molta della moderna tecnologia, inclusi i computer, le auto, i lettori DVD e i telefoni cellulari.

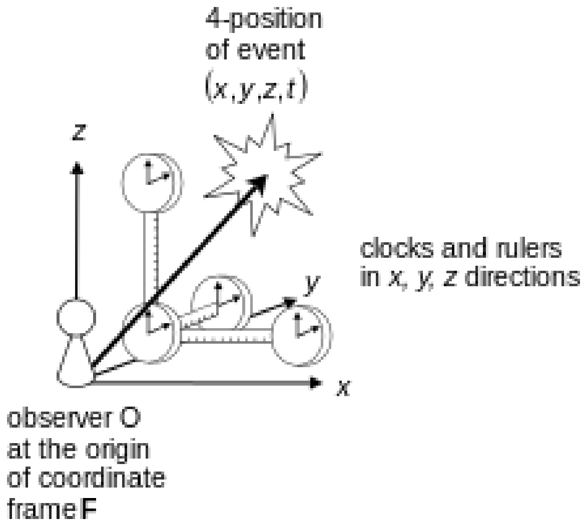
Che caos!

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

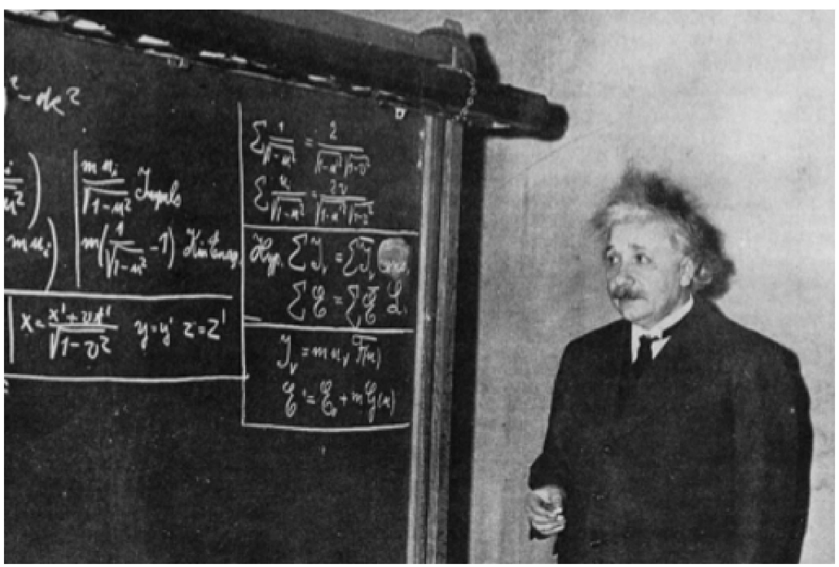




Tutto è “relativo”



$$x' = \frac{x + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \quad t' = \frac{t + \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



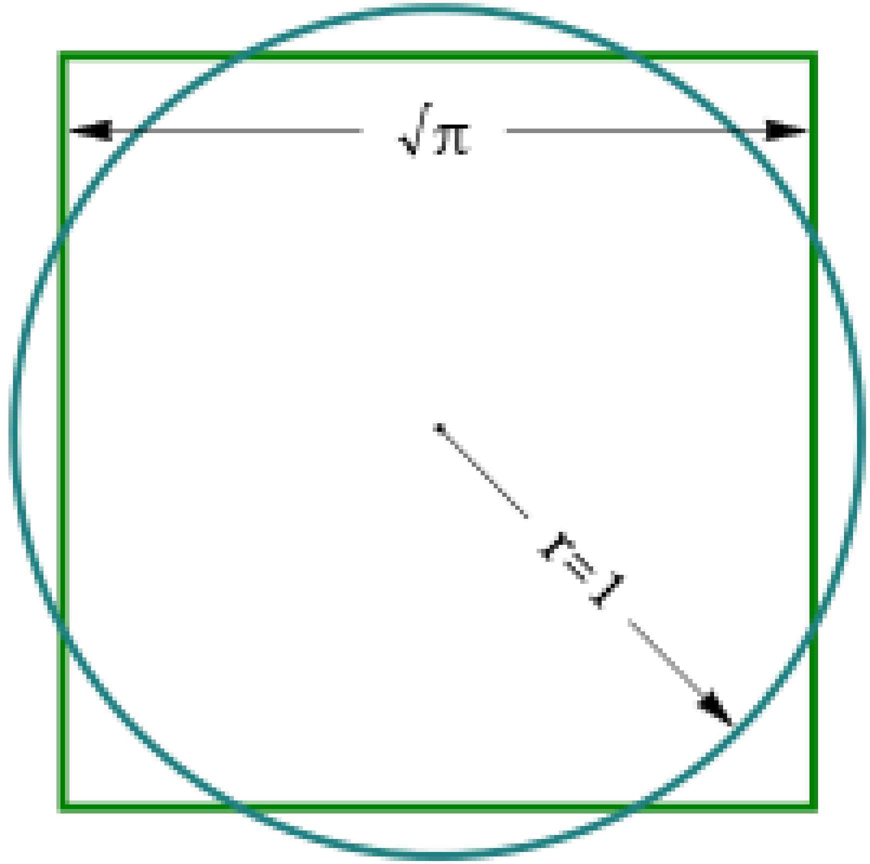
$$E=mc^2$$

Albert Einstein, 1905.

Riassumendo...

1. Comunicare prima di insegnare
2. Importanza del concetto di dimostrazione
3. Riconoscere schemi
4. “Pensare” visivamente
5. Modi diversi, stessa soluzione
6. Integrare storia e applicazioni

E alla fine se “non quadra”...



...tranquilli. Già ai Greci non quadrava!!

matemandrea@gmail.com

MATH&Co
LA MATEMATICA TRA ARTE E GIOCO

USO
UNICAM SCIENCE OUTREACH

www.facebook.com/mathandco